

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Радиус-вектор точки:

$$\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы для осей x, y, z;

$r_x=x, r_y=y, r_z=z$ - проекции \vec{r} на координатные оси или декартовы координаты точки.

Вектор скорости точки: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Средняя скорость движения:

$$\langle V \rangle = \frac{S}{t}, \text{ где } S - \text{ путь, пройденный точкой за время } t.$$

Средняя скорость перемещения:

$$\langle V_n \rangle = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}, \text{ где } |\Delta \vec{r}| - \text{ модуль перемещения за время } \Delta t.$$

Ускорение точки: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

Пройденный путь: $S = \int V dt$, где V-модуль скорости.

Тангенциальное ускорение: $a_\tau = \frac{dV}{dt}$.

Нормальное ускорение: $a_n = \frac{V^2}{R}$, где R-радиус кривизны траектории.

Полное ускорение: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

1.1. Материальная точка движется вдоль прямой так, что ее ускорение растет линейно и за первые 10 с достигает значения 5 м/с^2 . Определить в конце десятой секунды: 1) скорость точки, 2) пройденный точкой путь. Ответ: $V=25 \text{ м/с}$, $S=83,3 \text{ м}$.

1.2. Точка движется по окружности радиусом 4 м по закону $S = A + Bt^2$, где S – пройденный путь, $A=8 \text{ м}$, $B=2 \text{ м/с}^2$, t- время. Определить, в какой момент времени нормальное ускорение равно 2 м/с^2 .

Найти скорость, тангенциальное и полное ускорение точки в этот момент времени. Ответ: $t=0,71$ с, $a_t=4$ м/с², $V=2,8$ м/с, $a=4,5$ м/с².

1.3. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $S = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A=6$ м, $B=3$ м/с, $C=2$ м/с², $D=1$ м/с³. Определить для тела в интервале времени от $t_1=1$ с до $t_2=4$ с: 1) среднюю скорость движения, 2) среднее ускорение. Ответ: $V=28$ м/с, $a=19$ м/с².

1.4. Движение точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A=4$ м/с, $B = -0,05$ м/с². Построить графики зависимости пути, перемещения, скорости и ускорения точки в интервале времени от $t_1=0$ до $t_2=80$ с.

1.5. При движении тела в плоскости xOy вектор скорости изменяется по закону $\vec{V} = 3t\vec{i} - 4t\vec{j}$. Найти: 1) перемещение тела за первые 4 с движения, 2) ускорение, 3) уравнение траектории. Ответ: $\Delta r=40$ м, $a=5$ м/с², $y = -1,33x$.

1.6. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = A(\cos \omega t \cdot \vec{i} + \sin \omega t \cdot \vec{j})$, где \vec{r} – радиус-вектор точки, $A=0,5$ м, $\omega=5$ рад/с. Найти уравнение и нарисовать траекторию движения точки, определить модуль скорости и модуль нормального ускорения. Ответ: $x^2 + y^2 = 0,25$, $V=2,5$ м/с, $a_n = 12,5$ м/с².

1.7. Точка движется в плоскости xOy по закону: $x=0,1\sin \omega t$, $y=0,1(1+\cos \omega t)$. Найти путь, пройденный точкой за 10 с, угол между векторами скорости \vec{V} и ускорения \vec{a} , уравнение траектории движения $y=f(x)$. Ответ: $S(10)=\omega, \alpha = \pi/2, x^2 + (y-0,1)^2 = 0,01$.

1.8. Радиус-вектор частицы определяется выражением $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные вектора осей X, Y, Z. Вычислить: 1) путь S, пройденный частицей за первые 10 с, 2) модуль перемещения Δr за то же время, 3) ускорение частицы. Ответ: $S=500$ м, $\Delta r=500$ м, $a=10$ м/с².

1.9. Точка движется в плоскости xOy по закону: $x=2\sin \omega t$; $y=2\cos \omega t$. Найти путь, пройденный телом за 2 с; угол между векторами скорости V и ускорения a ; траекторию движения $y=f(x)$. Ответ: $S(2)=4\omega, \alpha = \pi/2, x^2 + y^2 = 4$.

1.10. Радиус-вектор, определяющий положение движущейся частицы, изменяется по закону: $\vec{r}(t) = 2t\sqrt{t}\cdot\vec{i} + 4t\sqrt{t}\cdot\vec{j}$. Найти для этой частицы скорость, путь и перемещение спустя 2 с после начала движения. Ответ: $V=9,5$ м/с, $12,6$ м.

1.11. Точка движется так, что вектор её скорости V меняется со временем по закону $\vec{V} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + 2t^2\vec{k}$ (м/с). Найти модуль перемещения

$|\Delta \vec{r}|$ за первые 4с её движения; модуль скорости в момент времени $t=4$ с.

Ответ: $|\Delta \vec{r}| = 46,3$ м, $V = 33$ м/с.

1.12. Точка движется в плоскости xOy по закону: $x = -2t$; $y = 4t(1 - t)$. Найти уравнение траектории $y = f(x)$ и изобразить ее графически; вектор скорости \vec{V} и ускорения \vec{a} в зависимости от времени; момент времени t_0 , в который вектор ускорения \vec{a} составляет угол $\pi/4$ с вектором скорости \vec{V} . Ответ: $y = -x^2 - 2x$; $\vec{V} = -2\vec{i} + 4(1 - 2t)\vec{j}$, $\vec{a} = -8\vec{j}$, $t_0 = 0,75$ с.

1.13. Радиус-вектор частицы изменяется по закону $\vec{r}(t) = t^2 \cdot \vec{i} + 4t\vec{j} - 2\vec{k}$ (м). Найти вектор скорости \vec{V} , вектор ускорения \vec{a} ; модуль вектора скорости V в момент времени $t = 2$ с. Ответ: $\vec{V} = 2t\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{a} = 2\vec{i}$, $V = 5,7$ м/с.

1.14. Точка начинает двигаться по плоскости xOy из начала координат с ускорением $\vec{a} = 2\vec{i} + 3t\vec{j}$. Найти вектора скорости и перемещения в зависимости от времени и уравнение траектории $y = f(x)$. Ответ: $\vec{V} = 2t\vec{i} + 1,5t^2\vec{j}$, $\Delta \vec{r}(t) = t^2 \cdot \vec{i} + 0,5t^3 \cdot \vec{j}$, $y = 0,5x \cdot \sqrt{x}$.

1.15. В течение времени τ скорость тела задается уравнением $V = A + Bt + Ct^2$ ($0 \leq t \leq \tau$). Определить среднюю скорость движения и среднее ускорение за промежуток времени от начала движения до τ .
Ответ: $V_{cp} = A + B \frac{\tau}{2} + C \frac{\tau^2}{3}$, $a_{cp} = B + C\tau$.

1.16. Точка движется в плоскости xOy по закону: $x = 2t$, $y = 4t(t - 1)$. Найти уравнение траектории $y = f(x)$ и изобразить ее графически; вектор скорости \vec{V} и ускорения \vec{a} в зависимости от времени; момент времени t_0 , в который вектор ускорения \vec{a} составляет угол $\pi/6$ с вектором скорости \vec{V} . Ответ: $y = x(x - 2)$, $\vec{V} = 2\vec{i} + (8t - 4)\vec{j}$, $\vec{a} = 8\vec{j}$, $t_0 = 0,93$ с.

1.17. Точка движется в плоскости xOy по закону: $x = 10 \cos \omega t$, $y = 10(1 - \sin \omega t)$. Найти путь, пройденный точкой за первые 10с движения; угол между векторами скорости \vec{V} и ускорения \vec{a} ; уравнение траектории движения $y = f(x)$. Ответ: $S = 100\omega$, $\alpha = \pi/2$, $x^2 + (10 - y)^2 = 100$.

1.18. Точка движется так, что ее вектор скорости меняется со временем по закону $\vec{V} = 2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 5t^2\vec{k}$ (м/с). Найти модуль перемещения точки за первые 2с её движения и модуль скорости в момент времени $t=2$ с. Ответ: 16 м; 21,6 м/с.

1.19. Радиус-вектор \vec{r} частицы меняется со временем по закону $\vec{r} = \vec{b} \cdot t(1 - \alpha t)$, где α - постоянная, \vec{b} - остоянный вектор. Найти: 1) вектор скорости и ускорения частицы в зависимости от времени, 2) промежуток времени Δt , по истечение которого частица вернется в исходную точку, 3) путь, который пройдет точка за время Δt . Ответ: $\vec{V} = \vec{b}(1 - 2\alpha t)$, $\vec{a} = -2\alpha\vec{b}$, $\Delta t = \frac{1}{\alpha}$, $S = \frac{b}{2\alpha}$.

1.20. Точка движется в плоскости xOy по закону: $x = \frac{t}{2}$, $y = t(1 - t)$. Найти уравнение траектории $y = f(x)$ и изобразить ее графически; вектор скорости \vec{V} и ускорения \vec{a} в зависимости от времени; момент времени t_0 , в который вектор ускорения \vec{a} составляет угол $\pi/3$ с вектором скорости \vec{V} . Ответ: $y = 2x - 4x^2$, $t_0 = 0,65$ с; $\vec{V} = 0,5\vec{i} + (1 - 2t)\vec{j}$; $\vec{a} = -2\vec{j}$.

1.21. Частица движется так, что ее радиус-вектор изменяется по закону: $\vec{r}(t) = 7\vec{i} + 4t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ (м). По какому закону изменяется вектор скорости \vec{V} и вектор ускорения \vec{a} частицы? Найти модуль вектора скорости V в момент времени $t = 3$ с и перемещение тела Δr за первые 4с движения. Ответ: $\vec{V} = 4\vec{j} + 6t\vec{k}$, $\vec{a} = 6\vec{k}$; $V = 18,4$ м/с; $\Delta r = 50,6$ м.

1.22. В плоскости xOy движется точка так, что скорость ее изменяется по закону $\vec{V} = 0,2t(6\vec{i} + 8\vec{j})$. Определить: 1) ускорение точки, 2) скорость через 5 с после начала движения, 3) перемещение за 5 с движения. Ответ: 2 м/с², 10 м/с, 25 м.

1.23. Точка движется в плоскости xOy по закону: $x = 0,1\cos\omega t$, $y = 1 - 0,1\sin\omega t$. Найти путь, пройденный телом за 10с; угол между векторами скорости \vec{V} и ускорения \vec{a} ; траекторию движения $y = f(x)$. Ответ: $S = \omega$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $x^2 + (1 - y)^2 = 0,01$.

1.24. Точка движется в плоскости xOy по закону: $x = 10t$, $y = 9t(1 - 2t)$. Найти уравнение траектории $y = f(x)$ и изобразить ее графически; вектор скорости \vec{V} и ускорения \vec{a} в зависимости от времени; момент времени t_0 , в который вектор ускорения \vec{a} составляет угол $\pi/3$ с вектором скорости \vec{V} . Ответ: $y = 0,9x(1 - 0,2x)$, $t_0 = 0,41$ с.

1.25. Частица движется по оси X так, что ее скорость меняется по закону $V = \beta\sqrt{x}$, где β - постоянная. Имея в виду, что в момент времени $t=0$ частица находится в точке $X=0$, найдите: 1) зависимость от времени скорости и ускорения частицы, 2) среднюю скорость частицы за время, в течение которого она пройдет первые S метров пути. Ответ:

$$V = \frac{\beta t^2}{2}, a = \frac{\beta^2}{2}, V_{cp} = \frac{\beta\sqrt{S}}{2}.$$

2. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Угловая скорость: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, где φ – угловой путь $\varphi = \int \omega dt$.

Средняя угловая скорость за время Δt : $\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$.

Угловое ускорение: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

Среднее угловое ускорение: $\langle \varepsilon \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$.

Связь между линейными и угловыми величинами: $V = \omega \cdot R$; $a_\tau = \varepsilon \cdot R$.

2.1. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол поворота зависит от времени по закону $\varphi = 10 + 20 \cdot t - 2 \cdot t^2$. Найти: 1) среднее значение угловой скорости $\langle \omega \rangle$ за промежуток времени от $t=0$ до остановки; 2) угловое ускорение в момент остановки колеса; 3) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от оси вращения для момента времени $t=4$ с. Ответ: 10 рад/с; -4 рад/с²; 1,65 м/с².

2.2. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = -16 + 4 \cdot t$. Найти: 1) среднее значение угловой скорости тела за промежуток времени от $t=0$ до остановки; 2) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 1 м от оси вращения для момента времени $t_1=3,5$ с; 3) линейную скорость вращения точек, лежащих на расстоянии 1 м от оси вращения в момент времени $t_2=3$ с. Ответ: -8 рад/с; 5,66 рад/с²; -4 м/с².

2.3. Диск радиусом 10 см вращается так, что зависимость угла поворота от времени задается уравнением $\varphi = A + B \cdot t^3$ (рад), где $A=2$ рад, $B=8$ рад/с. При каком значении угла поворота полное ускорение точки на краю диска составляет с радиусом колеса угол 45° ? Какова угловая скорость диска в этот момент времени? Ответ: 3 рад; 6 рад/с.

2.4. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2 + 4 \cdot t - 2 \cdot t^2$. Найти: 1) среднее значение угловой скорости $\langle \omega \rangle$ за промежуток времени от $t=0$ до остановки; 2) угловую скорость тела в момент времени $t=0,25$ с; 3) нормальное ускорение точки, находящейся на расстоянии 1 м от оси вращения в тот же момент времени. Ответ: 2 рад/с; 3 рад/с; 9 м/с².

2.5. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = 18t - 9t^2$. Найти: 1) среднее значение угловой скорости тела $\langle \omega \rangle$ за промежуток времени от $t=0$ до остановки; 2) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 60 см от оси вращения для момента времени $t=1$ с; 3) число оборотов, которое сделает колесо до остановки. Ответ: 6 рад/с; 48,6 рад/с²; 1,9.

2.6. Колесо автомобиля вращается равнозамедленно и за время 2 мин оно изменило частоту вращения от 240 до 60 об/мин. Определить угловое ускорение колеса и число полных оборотов, сделанных колесом за это время. Записать уравнение углового пути и угловой скорости. Ответ: 0,157 рад/с²; 300.

2.7. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 8 - 8 \cdot t + t^2$. Найти: 1) среднее значение угловой скорости за промежуток времени от $t=0$ до остановки; 2) угловое ускорение в момент остановки тела; 3) нормальное ускорение точки, находящейся на расстоянии 1 м от оси вращения для момента времени $t=2$ с. Ответ: -4 рад/с²; 2 рад/с²; 16 м/с².

2.8. Диск радиуса $R=1$ м вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = 4 - 9t^2$. Найти: 1) среднее значение угловой скорости диска $\langle \omega \rangle$ за промежуток времени от $t=0$ до остановки; 2) полное ускорение точки, находящейся на ободе диска в момент времени $t=0,1$ с; 3) угловое ускорение в момент остановки диска. Ответ: 2,67 рад/с; 15,4 рад/с²; -12 рад/с².

2.9. Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения 50 об/с, после выключения тока, сделав 628 оборотов, остановился. Определить угловое ускорение якоря, написать уравнения углового пути и угловой скорости якоря. Ответ: 12,5 рад/с; $\varphi = 314t - 6,25t^2$; $\omega = 314 - 12,5t$.

2.10. Диск вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = -4 \cdot t + 10 \cdot t^2$. Найти: 1) среднее значение угловой скорости за промежуток времени от $t=0$ до остановки; 2) угловое ускорение в момент остановки; 3) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения для момента времени $t=0,1$ с. Ответ: -2 рад/с; 20 рад/с²; 16,3 м/с².

2.11. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = 9 - 9t^2$. Найти: 1) среднее значение угловой скорости тела за промежуток времени от $t=0$ до остановки; 2) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 1 м от оси вращения для момента времени $t=0,5$ с; 3) угловое ускорение в момент остановки. Ответ: 6 рад/с; 45,6 рад/с²; -18 м/с².

2.12. Точка движется по окружности радиусом 1 м и при этом ее нормальное ускорение меняется по закону $a_n = A + Bt + Ct^2$, где $A=1$ м/с²,

$B=2\text{м/с}^3$, $C=1\text{м/с}^4$. Найти уравнение углового пути точки. Сколько оборотов сделает точка за первые 4 с движения? Ответ: $\varphi = t + 0,5 \cdot t^2$; 1,9.

2.13. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 4 - 16 \cdot t + t^2$. Найти: 1) среднее значение угловой скорости за промежуток времени от момента до остановки; 2) угловую скорость тела в момент времени $t_1=4$ с; 3) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 1,2 м от оси вращения для момента времени $t_2= 7$ с. Ответ: -8 рад/с; -8 рад/с; 5,4 м/с².

2.14. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = 25 - 9t^2$. Найти: 1) среднее значение углового ускорения тела за промежуток времени от $t=0$ до остановки; 2) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 0,5 м от оси вращения для момента времени $t=1,5$ с; 3) зависимость угла поворота тела φ от времени. Ответ: 15 рад/с²; 17,6 м/с²; $\varphi = 25 \cdot t - 3 \cdot t^3$.

2.15. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота от времени определяется уравнением $\varphi = At^2$, где $A=0,5$ рад/с². Определить к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость диска, 2) угловое ускорение, 3) тангенциальное, нормальное и полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения. Ответ: 2 рад/с; 1 рад/с²; 0,8 м/с²; 3,2 м/с²; 3,3 м/с².

2.16. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 14 - 4t + 2t^2$. Найти: 1) число оборотов, которое совершит тело до остановки; 2) угловую скорость тела в момент времени $t= 0,5$ с; 3) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 1 м от оси вращения для момента времени $t=0,5$ с. Ответ: 1,9 об; -2 рад/с; 5,7 м/с².

2.17. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = -16 + 9t^2$. Найти: 1) зависимость угла поворота тела φ от времени; 2) средние значения угловой скорости и углового ускорения тела за промежуток времени от $t=0$ до остановки. Ответ: $\varphi = 3t^3 - 16t$; -10,6 рад/с; 12 рад/с².

2.18. Колесо, вращаясь равноускоренно, увеличивает частоту вращения от 3 до 4 об/с, совершая при этом 10 полных оборотов. Найти и записать законы изменения угловой скорости и углового пути в зависимости от времени. Ответ: $\omega = 18,8 + 2,2 \cdot t$; $\varphi = 18,8 \cdot t + 1,1 \cdot t^2$.

2.19. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол поворота зависит от времени по закону $\varphi = 2 - 6 \cdot t + 2 \cdot t^3$. Найти: 1) среднее значение углового ускорения в промежутке времени от 0 до остановки; 2) угловое ускорение в момент остановки колеса; 3)

тангенциальное ускорение точки, находящейся на расстоянии 0,4 м от оси вращения в момент времени $t=0,5$ с. Ответ: 6 рад/с^2 ; 12 рад/с^2 ; $2,4 \text{ м/с}^2$.

2.20. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 6t - 2t^3$. Найти: 1) число оборотов, совершенных телом до остановки, 2) среднее угловое ускорение в этом промежутке времени, 3) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 20 см от оси вращения в момент времени $t = 0,8$ с. Ответ: $0,64 \text{ об}$; -6 рад/с^2 ; $2,13 \text{ м/с}^2$.

2.21. Маховик диаметром 18 см вращается на оси электродвигателя с частотой 20 об/с. После отключения электрического тока маховик вместе с ротором электродвигателя совершил 120 оборотов и остановился. Найти и написать закон изменения угловой скорости маховика, и законы изменения нормального и тангенциального ускорения (для точек, лежащих на ободу маховика) от времени. Ответ: $\omega = 125,6 - 10,5t$; $a_t = \text{const} = 0,94 \text{ м/с}^2$; $a_n = (37,7 - 3,14t)^2$.

2.22. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = -20t^2 + 4t$. Найти: 1) среднее значение углового ускорения тела $\langle \varepsilon \rangle$ за промежуток времени от $t=0$ до остановки; 2) нормальное ускорение точки, находящейся на расстоянии 1,5 м от оси вращения для момента времени $t=0,1$ с; 3) зависимость угла поворота тела φ от времени. Ответ: 0 ; $0,06 \text{ м/с}^2$; $\varphi = 2t^2 - 6,67t^3$.

2.23. Диск вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = -6t + 2t^3$. Найти: 1) угловое ускорение в начальный момент времени и в момент остановки; 2) среднее значение углового ускорения за этот промежуток времени, 3) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 1 м от оси вращения для момента времени $t=0,5$ с. Ответ: 0 ; 12 рад/с^2 ; 6 рад/с^2 ; $21,1 \text{ м/с}^2$.